Centre de masse d'une plaque homogène

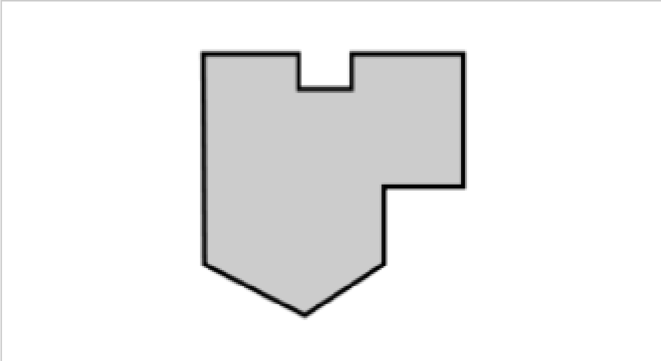
En mécanique, le **centre de masse d'une plaque homogène** est le point par rapport auquel la masse est uniformément répartie. Pratiquement, dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme le centre de masse est confondu avec le centre de gravité de la plaque.

Le centre de masse d'une plaque homogène peut se calculer à l'aide du calcul intégral mais il existe des règles simples qui permettent de trouver directement le centre de masse de plaques dont la forme géométrique est remarquable en utilisant l'outil géométrique du barycentre.

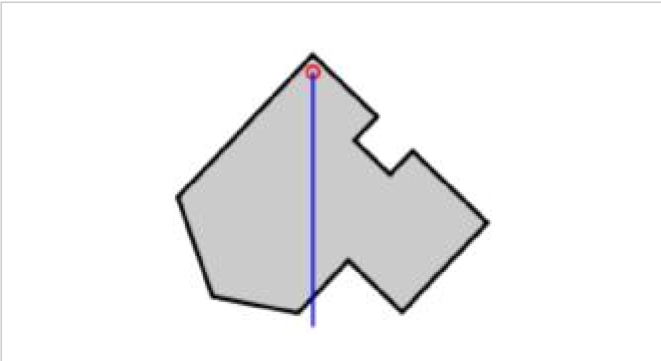
Sommaire

Détermination expérimentale

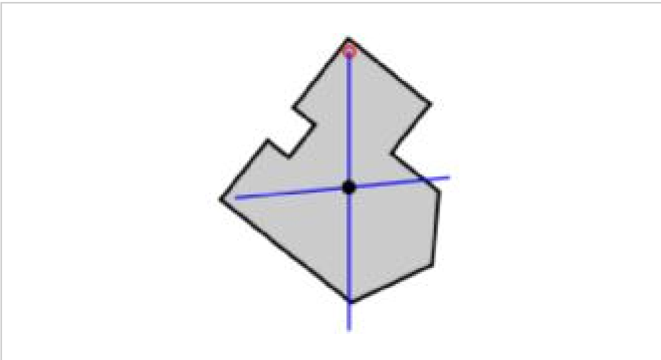
Cette méthode est utile lorsque l'on souhaite trouver le centre de gravité d'un objet plan dont la forme est complexe et dont on ne connaît pas les dimensions exactes.



Étape 1 : Une plaque de forme arbitraire.



Étape 2 : Suspendre la plaque en un point proche d'un sommet et atteindre la position d'équilibre. À l'aide d'un fil à plomb, tracer la verticale passant par ce point.



Étape 3 : Suspendre la plaque en un autre point et tracer une seconde verticale. Le centre de gravité est à l'intersection des deux droites.

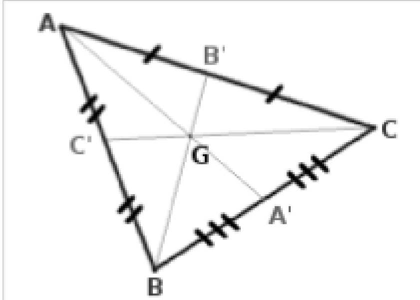
Principes de calcul

Centre de masse d'un triangle

Si la plaque homogène a la forme d'un triangle, son centre de masse correspond à l'intersection des médianes. C'est donc aussi l'isobarycentre des sommets. Cette situation est assez singulière pour être signalée.

En général, le centre de masse d'une plaque homogène polygonale ne coïncide pas avec l'isobarycentre de ses sommets. Par contre, tout polygone peut se découper en triangles, on peut donc déterminer aisément le centre de gravité de chaque sous-partie.

Par ailleurs, tout triangle peut se décomposer en deux triangles rectangles : il suffit donc considérer une hauteur de ce triangle. Le centre de gravité d'un triangle rectangle se trouve au tiers des côtés de l'angle droit. Cette propriété facilite le calcul.

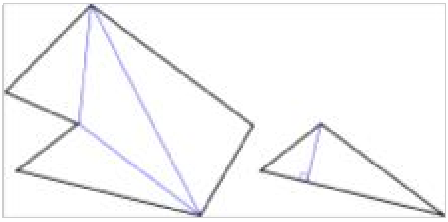


Le centre de gravité d'un triangle est à l'intersection de ses médianes

Éléments de symétrie

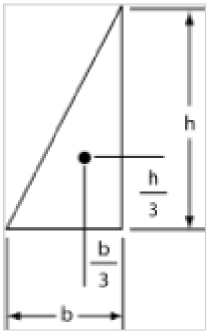
Si la plaque homogène possède un axe de symétrie alors le centre de masse est situé sur cet axe. Par corollaire, à partir de deux axes de symétrie, le centre de masse se trouve à leur intersection.

Si la plaque homogène est invariante par rotation d'angle non trivial, son centre de masse est confondu avec son centre de rotation. En particulier, si la plaque homogène possède un centre de symétrie c'est aussi son centre de masse.


Tout polygone peut se découper en triangles, et tout triangle peut se découper en triangles rectangles

Le centre de masse d'un parallélogramme est donc l'intersection de ses diagonales. Le centre de masse d'un cercle ou d'un ellipse coïncide avec leur centre.

Principe d'addition et de soustraction



Centre de gravité d'un triangle rectangle

Une plaque homogène composée de deux plaques P_1 et P_2 de centres de masse respectifs G_1 et G_2 a pour centre de masse le barycentre des points G_1 et G_2 pondérés par les aires des plaques P_1 et P_2.

Une plaque homogène composée d'une plaque P, de centre de masse G et d'aire a, de laquelle a été ôtée une plaque P_1 de centre de masse G_1 et d'aire a_1 a pour centre de masse le barycentre des points G et G_1 pondérés par les réels a et $-a_1$.

Le centre de masse d'une plaque polygonale peut donc être déterminée en découpant le polygone en triangles, en construisant le centre de masse G_i de chaque triangle et en calculant chacune de leurs aires a_i, le centre de masse est alors le barycentre du système pondéré (G_i, a_i). On verra dans les exemples que l'on peut même se passer du calcul des aires en utilisant des propriétés d'alignement.

Calcul intégral

Article détaillé : Centre de masse.

Si l'on munit la plaque d'un repère orthonormé, l'abscisse et l'ordonnée du centre de masse peuvent être calculées à l'aide d'un calcul intégral. Si l'on appelle $l(x)$ la longueur totale de la section de la plaque par la droite d'abscisse x, et si a est l'aire de la plaque, l'abscisse du centre de masse est donné par la formule

$$x_G = \frac{1}{a}\int x \cdot l(x)\mathrm{d}x = \frac{\int x \cdot l(x)\mathrm{d}x}{\int x \cdot \mathrm{d}x}$$

Il est parfois nécessaire ou plus commode de recourir à des intégrales multiples.

Constructions de centres de masse et formulaire

Mise en pratique des principes

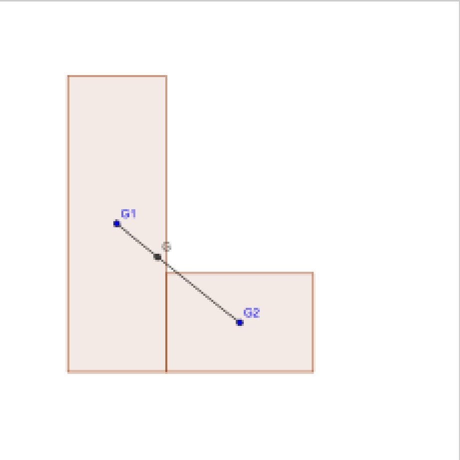
Centre de masse d'une plaque en forme de L

La plaque en forme de L est formée de deux rectangles de centres G_1 et G_2 et d'aire a_1 et a_2. Le centre de masse de la plaque est donc le barycentre de $(G_1, a_1)(G_2, a_1)$, il est situé entre G_1 et G_2 et vérifie :

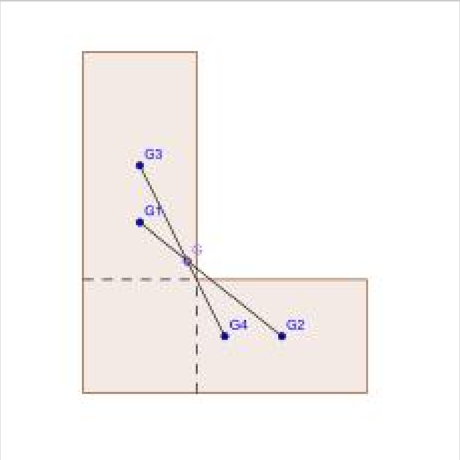
$$\mathrm{G_1G} = \frac{a_2}{a_1 + a_2}\mathrm{G_1G_2}.$$

Dans le dessin ci-dessous, le petit rectangle est deux fois plus petit que le grand, la distance G_1G est donc égale au tiers de la distance G_1G_2.

On remarque que le point G est aligné avec G_1 et G_2. Cette propriété permet d'éviter le calcul des aires : il suffit d'imaginer deux découpages différents de la plaque. Le point G étant situé sur la droite (G_1G_2) tout comme sur la droite (G_3G_4), il correspond alors au point d'intersection de ces deux droites. Cela est facilement réalisable pour la plaque en L car elle peut être découpée en deux rectangles de deux manières différentes.



Centre de masse après un premier découpage.



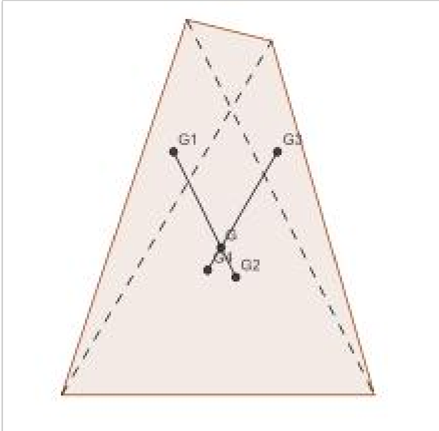
Centre de masse selon les deux découpages.

Centre de masse d'une plaque en forme de quadrilatère

La plaque peut être découpée suivant une diagonale en deux triangles dont les centre de masse G_1 et G_2 sont aisés à construire. Le centre de masse de la plaque est alors aligné avec ces deux points.

Un autre découpage de la plaque suivant l'autre diagonale fournit un autre alignement.

Le centre de masse est alors le point d'intersection des droites (G_1G_2) et (G_3G_4). On remarque que ce point ne coïncide pas avec l'isobarycentre des sommets qui serait le milieu des milieux des diagonales.



Centre de masse d'un quadrilatère quelconque.

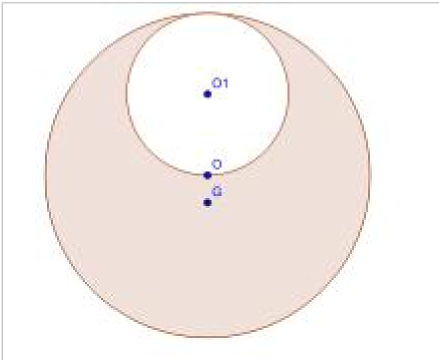
Le théorème de Wittenbauer fournit une construction simple du centre de masse d'un quadrilatère comme centre du parallélogramme de Wittenbauer. Il permet en outre de trouver la relation existant entre le point d'intersection I des diagonales, le centre de masse G et l'isobarycentre M des quatre sommets :

$$\overrightarrow{IG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IM}$$

Centre de masse d'un torque

Un torque est constitué d'un cercle de centre O de rayon R dans lequel a été découpé un cercle de centre O_1 et de rayon r tangent au premier cercle. Les surfaces des plaques sont proportionnelles au carré des rayons. Le centre de masse du torque est alors le barycentre du système $(O, R^2), (O_1, -r^2)$. On a donc

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = -\frac{r^2}{\mathrm{R}^2 - r^2}\overrightarrow{\mathrm{OO}_1}$$



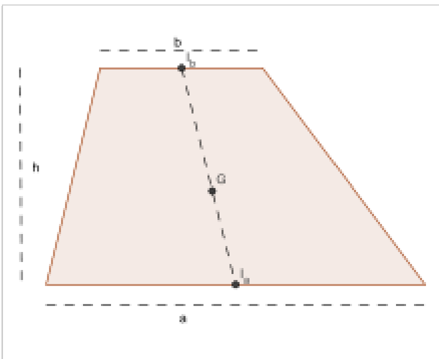
Centre de masse d'un torque.

Dans le dessin ci-contre, le rayon du petit cercle est deux fois plus petit que le rayon du grand, les points O_1, O et G sont alignés dans cet ordre et $\mathrm{OG} = \frac{1}{3}\mathrm{OO}_1 = \frac{1}{6}\mathrm{R}$.

Formulaire

Trapèze

> Le centre de masse d'un trapèze de bases $a > b$ et de hauteur h est situé sur la médiane joignant les deux bases et à une distance de la grande base égale à $\frac{h}{3} \times \frac{a+2b}{a+b}$. C'est le barycentre des milieux I_a et I_b pondérés respectivement par $2a + b$ et $2b + a$.



Polygone

> Article détaillé : Aire et centre de masse d'un polygone.

Si un polygone simple a pour sommets les points $A_0, A_1, ..., A_n = A_0$ et si A_i a pour coordonnées (x_i, y_i), alors les coordonnées de G sont données par les formules

$$x = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})}{3\sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})},$$

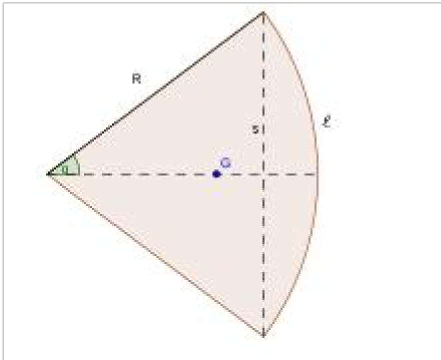
$$y = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})}{3\sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})}.$$

Centre de masse d'un trapèze quelconque.

Secteur circulaire

Le centre de masse d'un secteur circulaire d'angle 2α (en radian) et de rayon R est situé sur la bissectrice de l'angle et à une distance du centre égale à $\frac{2\mathrm{R}\sin\alpha}{3\alpha}$.

Si l'on note s la corde et ℓ l'arc du secteur angulaire, le centre de masse est à une distance du centre égale à $\frac{2}{3}\frac{\mathrm{R}s}{\ell}$

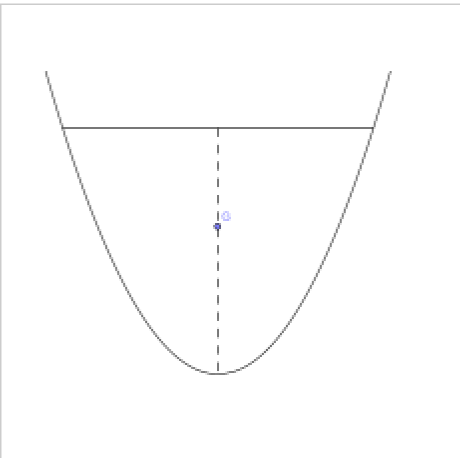


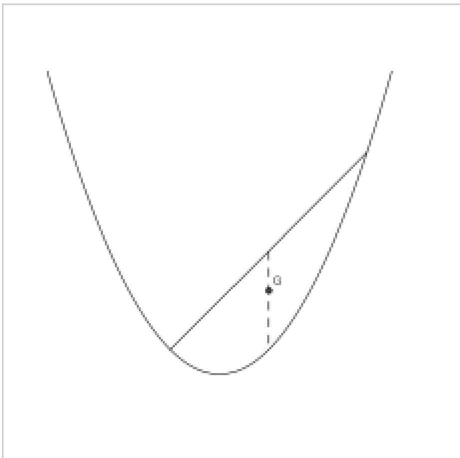
Centre de masse d'un secteur circulaire.

Parabole

Le centre de masse d'un plaque en forme de parabole de hauteur h est sur l'axe de symétrie de la parabole et à une distance du sommet égale à $3h/5$

De manière plus générale, le centre de masse d'une section de parabole est située au 3/5 de la flèche en partant du sommet.


Centre de masse d'une portion de parabole symétrique.


Centre de masse d'une portion de parabole non symétrique.

Annexes

Notes et références

Bibliographie

- Gieck, *Formulaire technique*

Voir aussi

- Barycentre (physique), Centre de gravité
- Barycentre (géométrie euclidienne)