Introduction
à
la logique floue

Antoine Cornuéjols

AgroParisTech

antoine.cornuejols@agroparistech.fr

http://www.lri.fr/~antoine

(Transparents (presque) entièrement repris de Monique Polit)

Logique floue : plan

1. Introduction
2. Des prédicats flous
3. Opérations sur les ensembles flous
4. Comment implanter un raisonnement flou
5. Illustrations

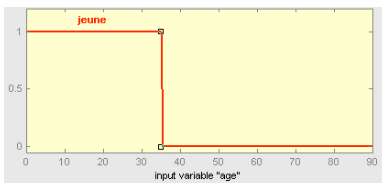
Logique floue : plan

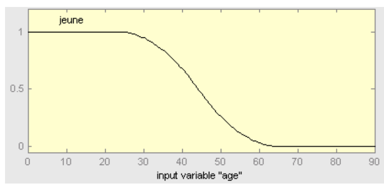
1. Introduction
2. Des prédicats flous
3. Opérations sur les ensembles flous
4. Comment implanter un raisonnement flou
5. Illustrations

Introduction (1)

- Un peu d'histoire
  - 1965 L. A. Zadeh «Fuzzy sets»
  - 1975 E. H. Mandani Expérimentation d'un régulateur flou
  - 1985 M. Sugeno Applications industrielles possibles
  - 1995 J. S. R. Jang Logique floue élargie aux systèmes à réseaux de neurones et à l' Intelligence Artificielle.

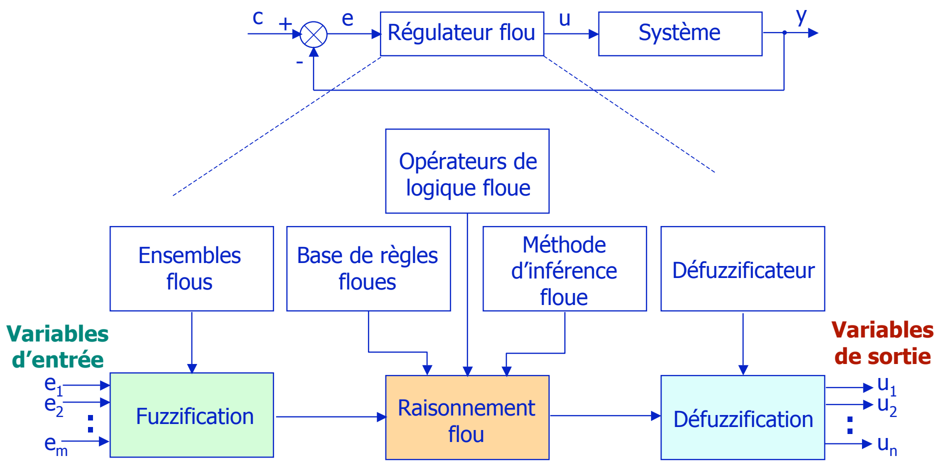
- Les ensembles flous : extension des ensembles «classiques» (*crisp set*)





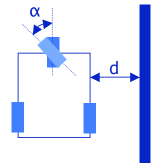
Introduction (2)

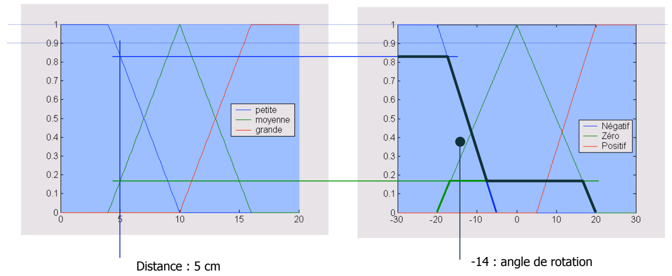
- Structure classique d'un régulateur flou



Introduction (3)

- Exemple : déplacement du robot le long du mur
  - Si la distance est petite, tourner à gauche (angle négatif)
  - Si la distance est autour de 10 cm, garder la direction actuelle
  - Si la distance est grande, tourner à droite (angle positif)





Introduction (4)

- Des **exemples d'applications** dans le domaine industriel
  - 1979 Cimenterie au Danemark
  - 1987 Métro de Sendai (Hitachi)
  - 1990 Conduite de hauts-fourneaux Dunkerque
  - 1992 Usine de papier au Portugal
  - Produits de consommation courante
    - Autocuiseurs de riz, aspirateurs, machines à laver, système de climatisation…
    - Appareils photos : autofocus, autoexposition, autozoom (Canon, Minolta).
    - Caméras : autofocus, autoexposition, stabilisateur d'image (Sanyo, Canon, Matsushita).
    - Photocopieurs : qualité d'image, distribution d'encre (Sanyo, Canon, Ricoh).
  - Industrie automobile
    - régulation du moteur, système de transmission, système de suspension, ABS, climatisation.
  - Ascenseur : temps d'attente réduit, ascension et arrêt plus régulier (Hitachi)
  - …

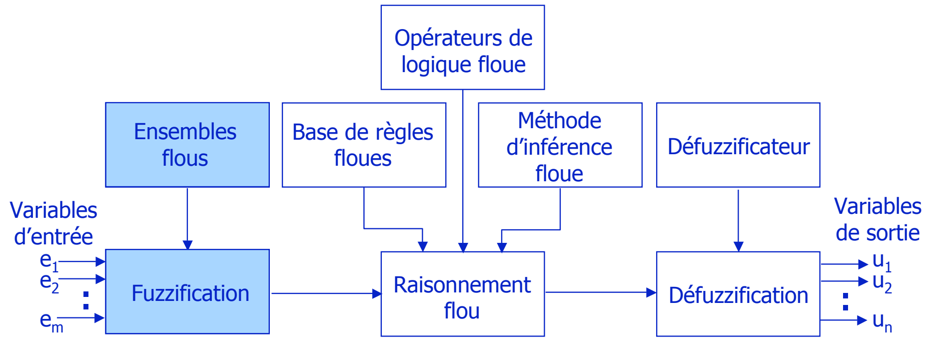
Introduction (5)

- **Quand utiliser un régulateur flou ?**
  - Difficulté (ou incapacité) de modéliser le processus : processus complexes, processus non linéaires.
  - Coût de la modélisation en terme de temps, moyens… trop élevé.
  - Amélioration des performances de régulateurs «linéaires».
- Points forts
  - Structure simple, coût de la synthèse et de l'implémentation «faible».
  - Proche du langage courant, facilité de modification.
- **Idées fausses**
  - Permet de réguler un processus sans aucune notion de régulation.
    - Il faut des bases …
  - Permet de traiter de connaissances imprécises
    - régulateur déterministe, exprime une relation déterministe entre ses entrées et ses sorties,
    - fonction non linéaire définie de façon intuitive, intelligible, ayant une signification précise.

Logique floue : plan

1. Introduction
2. Des prédicats flous
3. Opérations sur les ensembles flous
4. Comment implanter un raisonnement flou
5. Illustrations

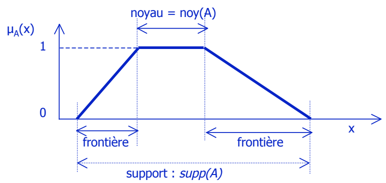
Ensembles flous (1) - Introduction



Les ensembles flous (2) - Définitions

- Définitions
  - Un **ensemble flou** A est défini sur un univers de discours U (ensemble d'éléments discrets ou continus) par sa **fonction d'appartenance** μ_A. La grandeur $\mu_A(x)$ définit le degré d'appartenance de l'élément x à l 'ensemble A.

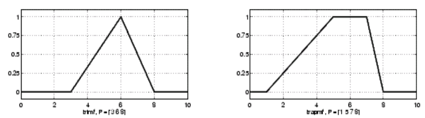
$$\mu_A : U \rightarrow [0,1]$$
$$x \rightarrow \mu_A(x)$$
$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}$$
$$supp\ (A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq 0\}$$
$$noy\ (A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}$$



  - L'ensemble flou vide est noté φ, il est défini par : $\mu_\phi(x) = 0,\ \forall\, x \in U$
  - Le plus grand ensemble flou sur U est noté 1_U , il est défini par : $\mu_{1_U}(x) = 1,\ \forall\, x \in U$

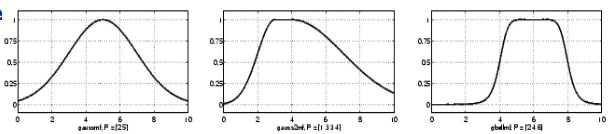
Les ensembles flous (3) - Définitions

- Les **fonctions d'appartenance** peuvent avoir diverses formes selon leur définition :
  - **triangulaire, trapézoïdale,**



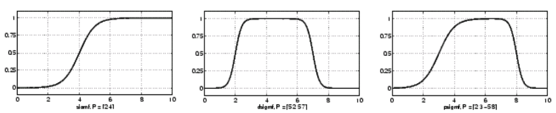
trimf trapmf

  - **Gaussienne**



gaussmf gauss2mf gbellmf

  - **Sigmoïdes**...



sigmf dsigmf psigmf

Les ensembles flous (4) - Définitions

– Exemples :

$$\mu_{jeune} : [0,100] \to [0,1]$$

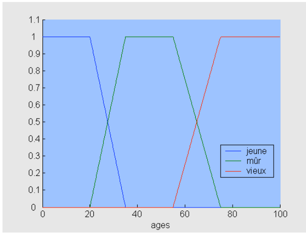
$$x \to \begin{cases} \mu_{jeune}(x) = 1 & si \;\; x \le 20 \\ \mu_{jeune}(x) = \dfrac{20-x}{15} & si \;\; 20 < x < 35 \\ \mu_{jeune}(x) = 0 & si \;\; x \ge 35 \end{cases}$$

$$\mu_{mûr} : [0,100] \to [0,1]$$

$$x \to \begin{cases} \mu_{mûr}(x) = 0 & si \;\; x \le 20 \;\; ou \;\; x \ge 75 \\ \mu_{mûr}(x) = \dfrac{x-20}{15} & si \;\; 20 < x < 35 \\ \mu_{mûr}(x) = 1 & si \;\; 35 \le x \le 55 \\ \mu_{mûr}(x) = \dfrac{55-x}{20} & si \;\; 55 < x < 75 \end{cases}$$

$$\mu_{vieux} : [0,100] \to [0,1]$$

$$x \to \begin{cases} \mu_{vieux}(x) = 0 & si \;\; x \le 55 \\ \mu_{vieux}(x) = \dfrac{x-55}{20} & si \;\; 55 < x < 75 \\ \mu_{vieux}(x) = 0 & si \;\; x \ge 75 \end{cases}$$



Les ensembles flous (5) - Définitions

– Exemples :

$$\mu_{jeune} : [0,100] \to [0,1]$$

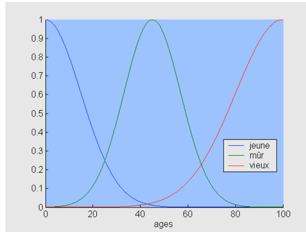
$$x \to \mu_{jeune}(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{15}\right)^2}$$

$$\mu_{mûr} : [0,100] \to [0,1]$$

$$x \to \mu_{mûr}(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-45}{12}\right)^2}$$

$$\mu_{vieux} : [0,100] \to [0,1]$$

$$x \to \mu_{vieux}(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-100}{20}\right)^2}$$

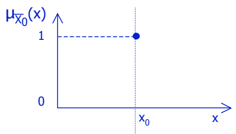


Les ensembles flous (6) - Définitions

– Pour une **variable x_0 exacte**, l'ensemble flou correspondant, noté $\bar{x}_0$, doit être représenté par un fait précis. On utilise un singleton. Sa fonction d'appartenance $\mu_{\bar{x}_0}$ est définie par :

$$\mu_{\bar{x}_0} : U \to [0,1]$$

$$x \to \mu_{\bar{x}_0}(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x = x_0 \\ 0 & si \;\; x \ne x_0 \end{cases}$$



Logique floue : plan

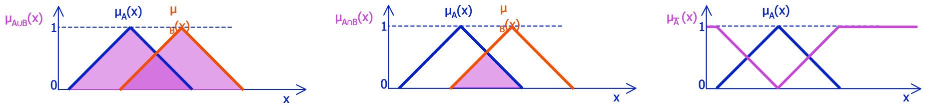
1. Introduction
2. Des prédicats flous
3. Opérations sur les ensembles flous
4. Comment implanter un raisonnement flou
5. Illustrations

Les ensembles flous (7) - Opérations

- **Opérations** sur les ensembles flous
  - Comme dans le cas des ensembles «classiques», les opérations logiques d'union (ou), d'intersection (et) et de complémentation (non) peuvent être appliquées aux ensembles flous. **Leur définition ne sont pas uniques**.
  - Les définitions les plus souvent rencontrées sont : le **max** et le **min** (Mandani), le **produit** et la **somme moins le produit** (Sugeno)

$$\begin{array}{lll} \textit{Mandani}: & \mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x)) & \textit{et} \quad \mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x)) \\ \textit{Sugeno}: & \mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x) & \textit{et} \quad \mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x) \\ \textit{Dans les deux cas}: & \mu_{\overline{A}}(x) \quad =1-\mu_A(x) & \\ \textit{pour} \quad x\in U & & \end{array}$$

  - Exemple dans le cas Mandani



Les ensembles flous (8) - Notion de T-norme

- **Opérations** sur les ensembles flous
  - Des familles d'opérateurs autres que le maximum (U), le minimum (∩)et le complément à 1 (¬) ont été définis dans le domaine des espaces métriques probabilisés
    - Les **T-normes** (intersection)
      - T(*x*,*y*) = T(*y*,*x*) (commutativité)
      - T(*x*, T(*y*,*z*)) = T(T(*x*,*y*), *z*) (associativité)
      - T(*x*,*y*) ≤ T(*z*,*t*) si *x* ≤ *z* et *y* ≤ *t* (monotonie)
      - T(*x*,1) = *x* (élément neutre)

      (Min satisfait ces propriétés)
    - Les **T-conormes** (union)
      - ⊥(*x*,*y*) = ⊥(*y*,*x*) (commutativité)
      - ⊥(*x*, ⊥(*y*,*z*)) = ⊥(⊥(*x*,*y*), *z*) (associativité)
      - ⊥(*x*,*y*) ≤ ⊥(*z*,*t*) si *x* ≤ *z* et *y* ≤ *t* (monotonie)
      - ⊥(*x*,0) = *x* (élément neutre)

      (Max satisfait ces propriétés)

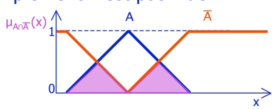
Les ensembles flous (9) - Propriétés

- **Propriétés** des ensembles flous
  - Comme dans le cas des ensembles «classiques», les ensembles flous possèdent certaines propriétés.

$$\begin{array}{ll} \textit{Commutativité}: & A\cup B=B\cup A, \quad A\cap B=B\cap A \\ \textit{Associativité}: & A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \\ \textit{Distributivité}: & A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), \quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \\ \textit{Idempotence}: & A\cup A=A, \quad A\cap A=A \\ \textit{Identité}: & A\cup\phi=A, \quad A\cup 1_U=1_U, \quad A\cap\phi=\phi, \quad A\cap 1_U=A \end{array}$$

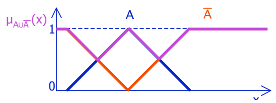
  - Les deux propriétés suivantes ne sont pas «classiques»
    - L'intersection d'un ensemble flou et de son complément n'est pas vide

$\textit{Loi de contradiction}: \quad A\cap\overline{A}\neq\phi$



    - L'union d'un ensemble flou et de son complément ne donne pas l'univers du discours

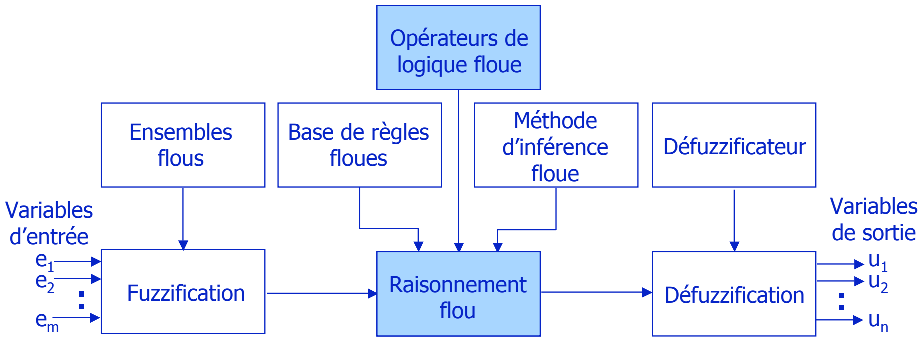
$\textit{Loi du "excluded middle"}: \quad A\cup\overline{A}\neq 1_U$



Logique floue : plan

1. Introduction
2. Des prédicats flous
3. Opérations sur les ensembles flous
4. Comment implanter un raisonnement flou
   1. Relations
   2. Modus Ponens généralisé
   3. Deffuzification
5. Illustrations

Les relations floues (1) - Introduction



Les relations floues (2) - Définitions

- **Relation floue :**
  - Une relation floue sur deux univers U et V est un ensemble flou :

$$R: U \times V \to [0,1]$$
$$(u,v) \to \mu_R(u,v)$$

  - On ne parle plus de fonction caractéristique mais de fonction d'appartenance.
  - La relation floue est binaire si U=V
- Exemple :
  - Soit l'univers U = { 1, 2, 3 }, la relation R « est approximativement égal à » peut-être définie par : $R: \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \to [0,1]$

$$(u,v) \quad \to \mu_R(u,v) = \begin{cases} 1 & si\ u=v \\ 0{,}8 & si\ |u-v|=1 \\ 0{,}3 & si\ |u-v|=2 \end{cases}$$

  - Notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0.3 & 0.8 \\ 2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 3 & 0.3 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

Les relations floues (3) - Opérations

- **Opérations sur les relations floues**
  - On définit l'**union** et l'**intersection** de deux relations floues par :

$$\textit{Soient} \quad \begin{matrix} R: U \times V \to [0,1] \\ (u,v) \to \mu_R(u,v) \end{matrix} \quad et \quad \begin{matrix} S: U \times V \to [0,1] \\ (u,v) \to \mu_S(u,v) \end{matrix}$$

Alors au sens Mandani :

$$\mu_{R\cup S}(u,v) = \max(\mu_R(u,v), \mu_S(u,v))$$

$$et \quad \mu_{R\cap S}(u,v) = \min(\mu_R(u,v), \mu_S(u,v))$$

Alors au sens Sugeno :

$$\mu_{R\cup S}(u,v) = \mu_R(u,v) + \mu_S(u,v) - \mu_R(u,v)\cdot\mu_S(u,v)$$

$$et \quad \mu_{R\cap S}(u,v) = \mu_R(u,v)\cdot\mu_S(u,v)$$

Les relations floues (4) - Opérations

- Exemple (cas Mandani) :
  - R = « x est beaucoup plus grand que y », S = « x est très proche de y »

$$\mu_R(x,y) = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \qquad \mu_S(x,y) = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.4 & 0 & 0.9 & 0.6 \\ x_2 & 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ x_3 & 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$$

  - R ∪ S = « x est beaucoup plus grand que y » **ou** « x est très proche de y »

$$\mu_{R\cup S}(x,y) = \max\left(\begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.4 & 0 & 0.9 & 0.6 \\ x_2 & 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ x_3 & 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.9 & 0.7 \\ x_2 & 0.9 & 0.8 & 0.5 & 0.7 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

  - R ∩ S = « x est beaucoup plus grand que y » **et** « x est très proche de y »

$$\mu_{R\cap S}(x,y) = \min\left(\begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.4 & 0 & 0.9 & 0.6 \\ x_2 & 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ x_3 & 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ x_2 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Les relations floues (5) - Opérations

– Soit une relation floue sur U × V, la **projection de R sur U** (Π_U) et la **projection de R sur V** (Π_V) sont définies par :

$$\text{Soit} \quad \begin{array}{rcl} R: U \times V & \rightarrow & [0,1] \\ (u,v) & \rightarrow & \mu_R(u,v) \end{array}$$

$$\text{Alors} \quad \mu_{\Pi_U}(u) = \sup\left\{\mu_R(u,v) \mid v \in V\right\} \quad \text{et} \quad \mu_{\Pi_V}(v) = \sup\left\{\mu_R(u,v) \mid u \in U\right\}$$

- Exemple :

$$\mu_R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{alors} \quad \mu_{\Pi_X}(x) = \sup\left\{ \left| \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{array} \right| \; y \in Y \right\} = \frac{0.8}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0.8}{x_3}$$

$$\text{et} \quad \mu_{\Pi_Y}(y) = \sup\left\{ \left| \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{array} \right| \; x \in X \right\} = \frac{0.9}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{0.7}{y_3} + \frac{0.8}{y_4}$$

Les relations floues (6) - Opérations

– On définit le **produit cartésien** de deux **ensembles** flous A et B par (Mandani) :

$$\text{Soient} \quad \begin{array}{rcl} A: U & \rightarrow & [0,1] \\ u & \rightarrow & \mu_A(u) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} B: V & \rightarrow & [0,1] \\ v & \rightarrow & \mu_B(v) \end{array}$$

$$\text{Alors} \quad \mu_{A \times B}(u,v) = \min(\mu_A(u), \mu_B(v))$$

- Le produit cartésien de deux ensembles flous est une relation floue.

– La **composition** de deux **relations** floues est définie par (Mandani) :

$$\text{Soient} \quad \begin{array}{rcl} R: U \times V & \rightarrow & [0,1] \\ (u,v) & \rightarrow & \mu_R(u,v) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} S: V \times W & \rightarrow & [0,1] \\ (v,w) & \rightarrow & \mu_S(v,w) \end{array}$$

$$\text{Alors} \quad \mu_{R \circ S}(u,w) = \sup_{v \in V}\left\{\min\left(\mu_R(u,v), \mu_S(v,w)\right)\right\}$$

Les relations floues (7) - Opérations

- **Exemple** (au sens Mandani)
  - R = « x est beaucoup plus grand que y », S = « y est très proche de z »

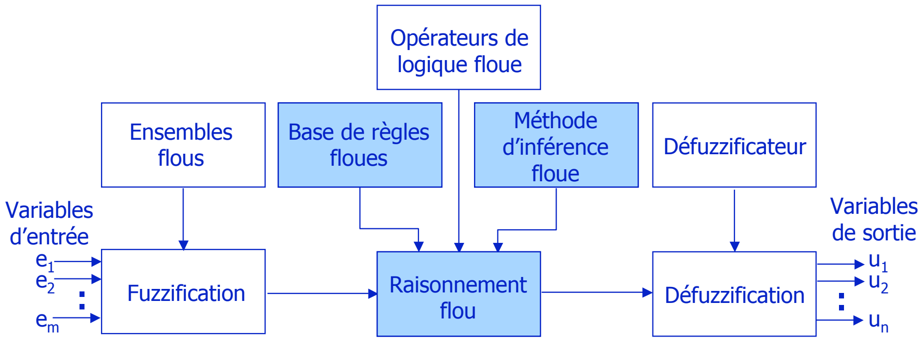
$$\mu_R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mu_S(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

  - alors leur **composition** est R ° S.

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Logique floue : plan

Le raisonnement flou (1) - Introduction



Le raisonnement flou (2) - Le problème

- **Implication**
  - **Règle floue :**
    - **Si** X est A **alors** Y est B
      μ_A μ_B
  - **Fait observé :**
    - X est A′
      $\mu_{A'}$
  - **Conclusion:**
    - Y est B′
      $\mu_{B'}$

Comment calculer $\mu_{B'}(y)$ en fonction de $\mu_{A'}(x)$ et de $\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)$?

Le raisonnement flou (2) - Implication

- **Implication**
  - **Logique classique :**
    - p ⇒q équivaut à ¬p ∨ q on obtient la table de vérité suivante :

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

  - **Logique floue :**
    - Il n'y a pas une définition unique !
    - L'extension de la définition précédente est appelée l'**implication de Kleene-Dienes** :
      - A ⇒B équivaut à $\mu_{A \Rightarrow B}(u,v) = \max\left(1 - \mu_A(u), \mu_B(v)\right)$
    - On utilise couramment l'**implication de Mandani** $\mu_{A \Rightarrow B}(u,v) = \min\left(\mu_A(u), \mu_B(v)\right)$

Le raisonnement flou (3) - Le raisonnement approximatif

- Le **raisonnement approximatif**
  - Théorie du raisonnement approximatif introduite par Zadeh en 1979.
  - Concept de base : La représentation de propositions par des formules affectant des ensembles flous comme valeurs aux variables.
  - Soient deux variables x ∈ X et y ∈ Y, et une relation de cause à effet entre x et y, parfaitement connue : y = f (x). Alors on peut effectuer l'inférence :

prémisse :	y = f (x)
Fait :	x = x ′
Conséquence :	y = f (x ′)

Le raisonnement flou (4) - Le raisonnement approximatif

– La plupart du temps, on ne connaît le lien de cause à effet f entre x et y qu'en certaines valeurs x particulières. On a une base de règles :

$\Re_1$: si $x = x_1$ alors $y = y_1$ et

$\Re_2$: si $x = x_2$ alors $y = y_2$ et

…

$\Re_n$: si $x = x_n$ alors $y = y_n$

Il faut alors, connaissant $x' \in X$, trouver $y' \in Y$ correspondant à x' conformément à la base de règles.

– Le problème de base du raisonnement approximatif est de trouver la fonction d'appartenance de la conséquence C d'une base de règles { $\Re_1$, …, $\Re_n$ } quand le fait x est A.

$\Re_1$: si x est A_1 alors y est C_1

$\Re_2$: si x est A_2 alors y est C_2

…

$\Re_n$: si x est A_n alors y est C_n

Fait : x est A

Conséquence : y est C

Le raisonnement flou (6) - Le raisonnement approximatif

– La règle de raisonnement la plus importante est celle du **modus podens généralisé**.

- **Modus podens :**

implication :	si x est A alors z est C
fait :	x est A
conséquence :	z est C

- **Modus podens généralisé**

implication :	si x est A alors z est C
fait :	x est A'
conséquence :	z est C '

où la conséquence C ' est déterminée par la composition du fait et de l'implication :

$$C' = A' \circ (A \Rightarrow C) \quad soit \quad \mu_{C'}(z) = \sup_{x \in X} \{\min(\mu_{A'}(x), \mu_{A \Rightarrow C}(x,z))\}, \quad z \in Z$$

- Au sens de Mandani, la fonction d'appartenance de la conséquence C ' est définie par :

$$C' = A' \circ (A \Rightarrow C) \ et \ \mu_{A \Rightarrow C}(x,z) = \min(\mu_A(x), \mu_C(z))$$

$$soit \quad \mu_{C'}(z) = \sup_{x \in X} \{\min(\mu_{A'}(x), \min(\mu_A(x), \mu_C(z)))\}, \quad z \in Z$$

Le raisonnement flou (7) - Inférences floues

- Application du raisonnement approximatif : l'inférence floue

– Règle d'inférence (au sens Mandani):

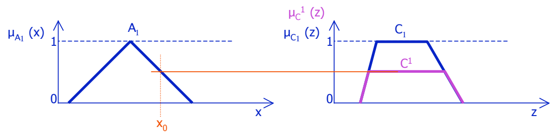
$\Re_1$:	si x est A_1 alors z est C_1
fait :	x est $\overline{x_0}$
conséquence :	z est C^1

où la conséquence C^1 est déterminée par :

$$\mu_{C^1}(z) = \sup_{x \in X} \{\min(\mu_{\overline{x_0}}(x), \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{C_1}(z)))\}, \quad z \in Z$$

$$or \quad \mu_{\overline{x_0}}(x) = 0, \ \forall x \neq x_0 \quad donc \quad \mu_{C^1}(z) = \min(\mu_{\overline{x_0}}(x_0), \min(\mu_{A_1}(x_0), \mu_{C_1}(z))), \quad z \in Z$$

$$soit \quad \mu_{C^1}(z) = \min(\mu_{A_1}(x_0), \mu_{C_1}(z)), \quad z \in Z$$



Le raisonnement flou (8) - Inférences floues

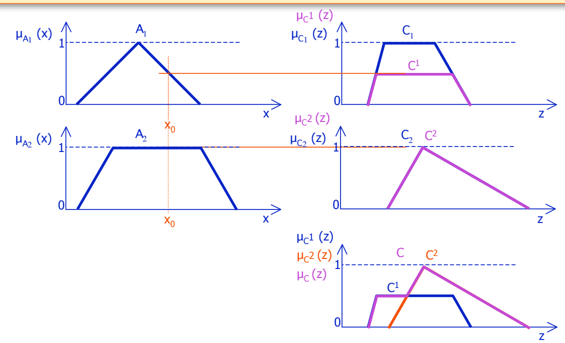
– Agrégation des règles (au sens Mandani):

$\Re_1$:	si x est A_1 alors z est C_1
$\Re_2$:	si x est A_2 alors z est C_2
…	
$\Re_n$:	si x est A_n alors z est C_n
Fait :	x est $\overline{x_0}$
Conséquence :	z est C

où la conséquence C est déterminée par :

$$\mu_C(z) = \max_{i=1,n} (\mu_{C^i}(z)), \quad z \in Z$$

$$soit \quad \mu_C(z) = \max_{i=1,n} (\min(\mu_{A_i}(x_0), \mu_{C_i}(z))), \quad z \in Z$$



Le raisonnement flou (9) - Inférences floues

- Prémisses composées :
  - Si les prémisses sont composées, on utilise l'union pour le **ou** et l'intersection pour le **et** afin de déterminer la fonction d'appartenance de la condition.
  - Exemple :

$\Re_1$:	si x est A_1 et y est B_1 alors z est C_1
$\Re_2$:	si x est A_2 ou y est B_2 alors z est C_2
Fait :	x est $\overline{x_0}$ et y est $\overline{y_0}$
Conséquence :	z est C

où la conséquence C est déterminée par (Mandani) :

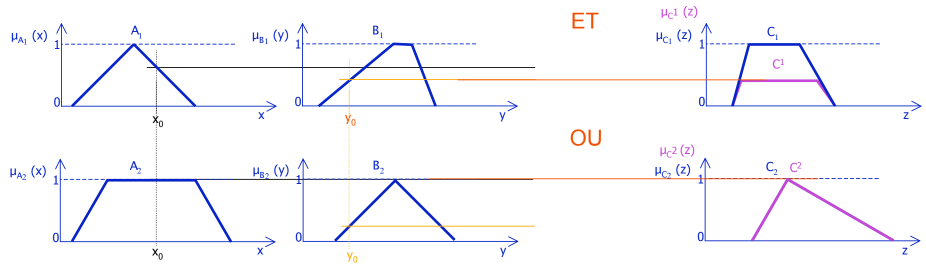
$$\mu_C(z) = \max\left(\mu_{C^1}(x,y),\ \mu_{C^2}(z)\right)\ ,\quad z \in Z$$

$$soit\quad \mu_C(z) = \max\left(\min\left(\mu_{A_1\cap B_1}(x_0,y_0), \mu_{C_1}(z)\right),\ \min\left(\mu_{A_2\cup B_2}(x_0,y_0), \mu_{C_2}(z)\right)\right)\ ,\quad z \in Z$$

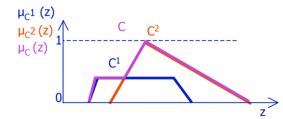
$$soit\ encore\ pour\quad z \in Z$$

$$\mu_C(z) = \max\left(\min\left(\min\left(\mu_{A_1}(x_0), \mu_{B_1}(y_0)\right), \mu_{C_1}(z)\right),\ \min\left(\max\left(\mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_2}(y_0)\right), \mu_{C_2}(z)\right)\right)$$

Le raisonnement flou (10) - Inférences floues



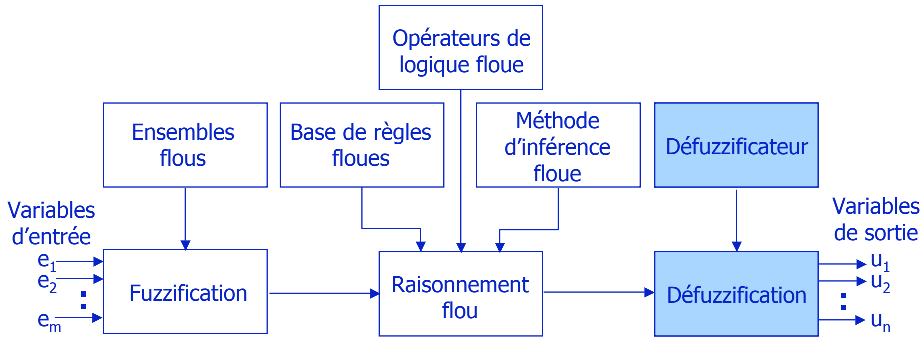
$\Re_1$:	si x est A_1 et y est B_1 alors z est C_1
$\Re_2$:	si x est A_2 ou y est B_2 alors z est C_2
Fait :	x est $\overline{x_0}$ et y est $\overline{y_0}$
Conséquence :	z est C



Logique floue : plan

1. Introduction
2. Des prédicats flous
3. Opérations sur les ensembles flous
4. Comment implanter un raisonnement flou
   1. Relations
   2. Modus Ponens généralisé
   3. Deffuzification
5. Illustrations

La défuzzification (1) - Introduction



La défuzzification (2) - Définition

- Définition
  - L'objectif de la défuzzification est de transformer un ensemble flou en en une valeur de commande. Soit C un ensemble flou, et **defuzz** l'opérateur de défuzzification :

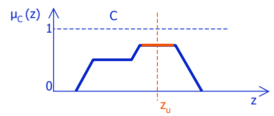
    z_u = defuzz(C), est une valeur précise.
  - Les opérateurs de défuzzification sont nombreux, citons par exemple :
    - Le **centre de gravité** (très souvent employée)

$$z_u = \frac{\int_Z w \cdot \mu_C(w) \cdot dw}{\int_Z \mu_C(w) \cdot dw} \quad ou \quad z_u = \frac{\sum_Z w_i \cdot \mu_C(w_i)}{\sum_Z \mu_C(w_i)}$$

    - La **moyenne des maximums**

$$z_u = \frac{\int_G w \cdot dw}{\int_G dw}, \quad où \quad G = \left\{ g \in Z \;\middle|\; \mu_C(g) = \max_{z \in Z}(\mu_C(z)) \right\}, \quad ou$$

$$z_u = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i, \quad où \quad z_i \in Z \quad et \quad \mu_C(z_i) = \max_{z_j \in Z}(\mu_C(z_j))$$

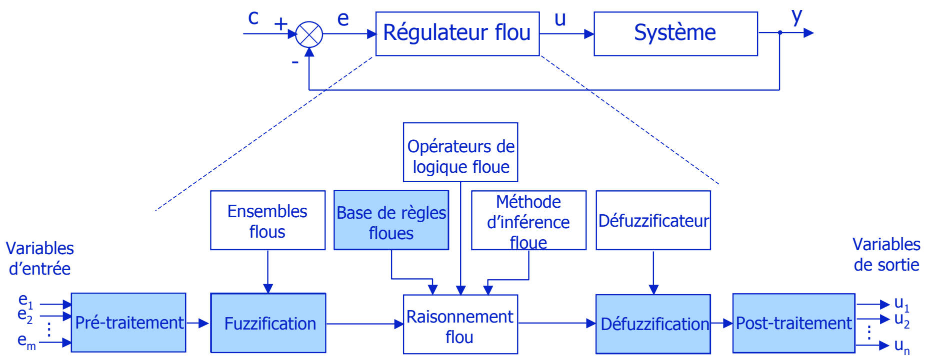


Logique floue : plan

1. Introduction
2. Des prédicats flous
3. Opérations sur les ensembles flous
4. Comment implanter un raisonnement flou
   1. Relations
   2. Modus Ponens généralisé
   3. Deffuzification
5. Illustration : contrôle flou

Régulation Floue (1) - Introduction

- Rappelons la structure classique d'un régulateur flou



Régulation Floue (2) - Pré-traitement

- **Pré-traitement**
  - Les mesures en entrée doivent être conditionnées :
    - Quantification, échantillonnage … ;
    - Normalisation, mise à l'échelle ;
    - Filtrage ;
    - Moyennage pour obtenir des tendances ;
    - combinaison pour obtenir des indicateurs ;
    - différentiation, intégration ou leurs équivalents discrets.
  - Univers du discours :
    - Il contient tous les éléments qui seront pris en considération.
    - Il est continu ou discret.
    - Univers standard : utilisation de la mise à l 'échelle, d'une limitation (éventuellement).

Régulation Floue (3) - Fuzzification

- **Fuzzification**
  - Conversion des données en entrée en degré d'appartenance par l'intermédiaire de fonctions d'appartenance.
  - Permet de déterminer le degré de confiance de chacune des conditions des règles pour la valeur de l'entrée (instance).
  - Il y a un degré d'appartenance par terme linguistique s'appliquant à l 'entrée.

Régulation Floue (4) - Fuzzification

- **Fonctions d'appartenance**
  - Comment doit-on déterminer la forme des ensembles ?
  - Combien d'ensembles sont nécessaires et suffisants ?
  - Un terme doit être suffisamment «large» pour autoriser du bruit de mesure
  - Un certain degré de recouvrement est nécessaire pour éviter des états mal définis conduisant à des sorties mal définies.
  - Commencer par des ensembles triangulaires symétriques et trois ensembles pour chaque variable. Plus de sept ensembles n'apporte aucune amélioration.
  - Pour les variables d'entrée :
    - Choisir les largeurs de façon à ce que chaque valeur de l'univers appartienne à deux ensembles au moins ; excepté pour les extrémités.
    - S 'il y a un « trou » entre deux ensembles, aucune règle ne se trouve activée pour ces valeurs, la fonction de régulation n'est pas définie.
  - Pour la variable de sortie :
    - Les «trous» sont souhaitables.
    - Si la fonction est définie sous forme de singletons, alors le calcul est plus simple, on peut utiliser les commandes maximales (obtention d'un phénomène transitoire rapide en cas de grandes variations), l'écriture des règles est plus intuitive.

Régulation Floue (5) - Base de règles

- **Base de règles**
  - Les règles peuvent mettre en jeu plusieurs variables dans leurs conditions et leurs conclusions.
  - Le contrôleur nécessite, en général, en entrée l'erreur et la dérivée de l'erreur :
    - Représentation sous forme de règles :

si l'erreur est négative et la dérivée de l'erreur est négative alors la sortie est très négative
si l'erreur est négative et la dérivée de l'erreur est nulle alors la sortie est négative
si l'erreur est négative et la dérivée de l'erreur est positive alors la sortie est nulle
si l'erreur est nulle et la dérivée de l'erreur est négative alors la sortie est négative
si l'erreur est nulle et la dérivée de l'erreur est nulle alors la sortie est nulle
si l'erreur est nulle et la dérivée de l'erreur est positive alors la sortie est positive
si l'erreur est positive et la dérivée de l'erreur est négative alors la sortie est nulle
si l'erreur est positive et la dérivée de l'erreur est nulle alors la sortie est positive
si l'erreur est positive et la dérivée de l'erreur est positive alors la sortie est très positive

Régulation Floue (6) - Base de règles

- Représentation sous forme de relations :

erreur	dérivée de l'erreur	sortie
négative	négative	très négative
négative	nulle	négative
négative	positive	nulle
nulle	négative	négative
nulle	nulle	nulle
nulle	positive	positive
positive	négative	nulle
positive	nulle	positive
positive	positive	très positive

- Représentation sous forme de table :

		dérivée de l'erreur		
		négative	nulle	positive
	négative	très négative	négative	nulle
erreur	nulle	négative	nulle	positive
	positive	nulle	positive	très positive

  - Dans le cas ou une case est vide, cela signifie qu'il manque une règle.

Régulation Floue (7) - Bases de règles

- Connexions :
  - les connexions et et ou sont en général définies par :
    - A et B : min (A , B) A ou B : max (A , B)

    ou

    - A et B : A * B A ou B : A + B - A * B

- **Inférence** :
  - détermination du degré d'appartenance de chacune des conditions des règles ,
  - activation de la règle, détermination de la conséquence (min)
  - agrégation des règles (max)
  - La méthode choisie à peu d 'influence sur le résultat.

Régulation Floue (8) - Défuzzification - Post-traitement

- **Défuzzification**
  - Utilisation de différentes méthodes :
    - centre de gravité, centre de gravité pour les singletons,
    - bissectrice
    - moyenne des minimums …
    - calcul facilité lorsque les les fonctions d'appartenance de la variable de sortie sont disjointes.

- **Post-traitement**
  - la mise à l 'échelle de la sortie doit être effectuée pour que la valeur de sortie définie sur un univers de discours soit transformée en valeur de commande physique.

Logique Floue : bibliographie

- B. Bouchon-Meunier : « **La logique floue** ». PUF « Que Sais-Je ? »
- L. Gacogne : « **Éléments de logique floue** ». Hermès, 1997.
- M. Stefick : « **Introduction to Knowledge Systems** ». Morgan Kaufmann, 1995.